

Equations de transport sur des domaines variables dans le temps et systèmes à retard

Mamadou Diagne, Françoise Couenne, Bernhard Maschke

Université Claude Bernard Lyon 1

LAGEP Laboratoire d'Automatique et du Génie des Procédés France

17 septembre 2012

Plan

Introduction

Couplage par une interface mobile :procédé d'extrusion

Modèle bi-zone d'une extrudeuse

Dynamique de l'interface mobile $I(t)$

Relations d'interface

Equation de transport et système à retard

Résolution par la méthode des caractéristiques

Système à retard sur l'entrée dépendant de l'état

Stabilisation de l'interface mobile

Système à retard autour de l'équilibre

Stabilisation autour de l'équilibre

Simulations

Conclusion et perspectives

Thématique

- ▶ Modélisation et commande de systèmes de loi de conservation couplés par une **interface mobile**,
- ▶ Illustration par le **modèle dynamique d'une extrudeuse**,
- ▶ Il existe des travaux sur le couplage d'équations de transport par **une interface fixe**.
- ▶ Commande de cette classe de système (**cas scalaire**) par une approche système à retard

Problème d'interface fixe

(Chalon, Lefloch..) : Développement de schéma numérique et étude des phénomènes de résonance

(Godlewski-Raviart (2002,2005,2006), Boutin-2010..) sur l'existence de solution et étude du système augmenté par une **fonction couleur**.

Quelles informations transmettre quand il s'agit de couplage ?

- ▶ Conservation de certaines quantités physiques
- ▶ Continuité de certaines variables pertinentes

Les relations de transmission dérivent **d'une continuité du flux ou de l'état à l'interface.**

$$\partial_t u + \partial_x f_-(u) = 0 \quad x < 0 \quad t > 0 \quad (1)$$

$$\partial_t u + \partial_x f_+(u) = 0 \quad x > 0 \quad t > 0$$

Couplage par le flux

$$f_-(u) = f_+(u) = 0$$

Couplage par l'état

$$u(0^-, t) = u(0^+, t) \quad t > 0$$

ou plus généralement

$$\theta_-(u(0^-, t)) = \theta_+(u(0^+, t)) \quad t > 0$$

θ_- et θ_+ sont des changements de variable

Approche pour le cas d'une interface fixe

Ajouter au modèle de couplage une **structure d'interface** :
Modèle d'interface mince ou épaisse

- ▶ suffisamment enrichissante pour assurer un problème global mathématiquement bien posé/mieux posé.
- ▶ suffisamment souple pour envisager de prendre en compte à posteriori des considérations physiques discriminantes (dissipation d'entropie à l'interface, relation cinétique).
- ▶ que l'on peut implémenter numériquement.

Boutin-2010 (Thèse) utilise la notion de **fonction couleur** pour étendre son opérateur sur tout le domaine. L'équation (Eq. 1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\partial_t u + A(u, c) \partial_x u &= 0 \\ \partial_t c &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

c est une **fonction couleur**

$$c(x, 0) = 1 \quad x > 0 \quad c(x, 0) = -1 \quad x < 0 \quad (3)$$

$$A(u, c) = \frac{1-c}{2} \nabla f_-(u) + \frac{1+c}{2} \nabla f_+(u) \quad (4)$$

Système en u de taille N **strictement hyperbolique**

Système en $(u; c)$ de taille $N + 1$: **perte d'hyperbolicité**

$\lambda = 0$ est valeur propre multiple si $A(u; v)$ n'est pas inversible

Manifestation de la résonance à l'interface

Plan

Introduction

Couplage par une interface mobile :procédé d'extrusion

Modèle bi-zone d'une extrudeuse

Dynamique de l'interface mobile $I(t)$

Relations d'interface

Equation de transport et système à retard

Résolution par la méthode des caractéristiques

Système à retard sur l'entrée dépendant de l'état

Stabilisation de l'interface mobile

Système à retard autour de l'équilibre

Stabilisation autour de l'équilibre

Simulations

Conclusion et perspectives

Description du procédé

Les procédés d'extrusion sont destinés à la fabrication de produits finis ou semi-finis par utilisation de vis sans fin en rotation dans un fourreau cylindrique disposant d'un système de chauffage.

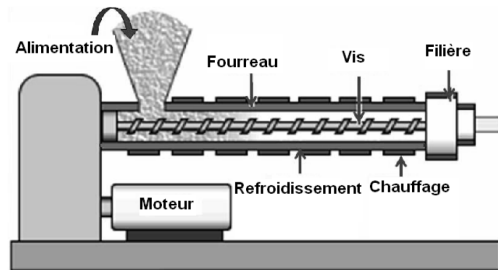


FIG.: Description schématique d'une extrudeuse

Nous présentons ici un modèle idéalisé des phénomènes de transfert de matière et de chaleur dans une extrudeuse à profil de vis uniforme.

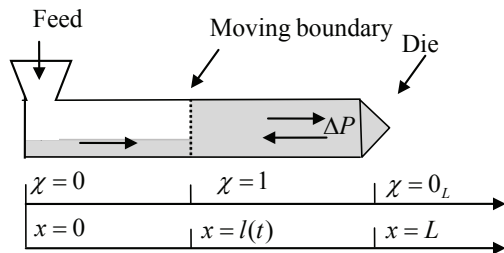


FIG.: Schéma des deux zones de convoyage et pompage

La création des zones partiellement et entièrement remplies (PFZ et FFZ) est due au gradient de pression lié à la géométrie de la filière.

Hypothèses de modélisation

- ▶ l'écoulement est uni-dimensionnel ; c'est l'écoulement longitudinal qui détermine le débit de l'extrudeuse,
- ▶ les pertes de chaleur sont négligeables sur l'axe des vis,
- ▶ la capacité calorifique C et la masse volumique ρ_0 sont supposées constantes,
- ▶ la viscosité η est constante.

Le modèle repose sur l'écriture des bilans de masse totale, de l'eau et d'énergie pour chaque zone.

Les variables d'état considérées sont :

- ▶ le taux de remplissage $f(x, t)$: rapport entre volume occupé et volume disponible ou efficace V_{eff} (dans la direction de l'écoulement de coordonnée x)
- ▶ Idem pour le taux d'humidité $M(x, t)$
- ▶ la température $T(x, t)$
- ▶ la pression $P(x, t)$ qui découle d'un bilan de quantité de mouvement sous l'hypothèse de stationnarité

Les variables d'entrée sont :

le débit d'alimentation en matière $F_{in}(t)$, la vitesse de rotation des vis $N(t)$, et la température du fourreau $T_F(x, t)$.

Modèle de la zone partiellement remplie ou *PFZ*

Dans cette zone le taux de remplissage $f_p(x, t)$ varie dans l'intervalle $[0, 1[$. et la variable spatial $x \in [0, l(t)[$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f_p(x, t) \\ M_p(x, t) \\ T_p(x, t) \end{pmatrix} = -\xi N(t) I_3 \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} f_p(x, t) \\ M_p(x, t) \\ T_p(x, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_1(f_p, N, T_p, T_{F_p}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\Omega_1(f, N, T, T_F) = \frac{\mu \eta N^2(t)}{f_p(x, t) \rho_0 V_{eff} C} + \frac{S_{ech} \alpha}{\rho_0 V_{eff} C} (T_F - T_p) \quad (6)$$

Modèle de la zone entièrement remplie ou FFZ

Par définition de la zone entièrement remplie, le taux de remplissage $f_f(x, t) = 1$. C'est donc la variable conjuguée, la pression qui varie.

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = \eta \frac{V_{eff} N(t) \rho_0 - F_d(t)}{B \rho_0} \quad (7)$$

Le débit net en sortie de filière $F_d(t)$ est donné par la relation suivante :

$$F_d = \frac{K_d}{\eta} \Delta P \text{ avec } \Delta P(t) = (P(L, t) - P_0) \quad (8)$$

où K_d caractérise la géométrie de la filière et dépendant aussi des caractéristiques géométriques de la vis B .

Modèle de la zone entièrement remplie ou FFZ

Pour $x \in [l(t), L]$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} M_f(x, t) \\ T_f(x, t) \end{pmatrix} = -\frac{F_d \xi}{\rho_0 V_{eff}} I_2 \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} M_f(x, t) \\ T_f(x, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_2(N, T_f, T_{F_f}) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Le terme source apparaît de nouveau dans le bilan d'énergie :

$$\Omega_2(N, T, T_F) = \frac{\mu \eta N^2(t)}{f(x, t) \rho_0 V_{eff} C} + \frac{S_{ech} \alpha}{\rho_0 V_{eff} C} (T_F - T_f) \quad (10)$$

Bilan de masse et dynamique de l'interface

La *PFZ* et la *FFZ* sont séparées par une interface mobile $l(t)$.
L'équation de la frontière s'obtient par un bilan de matière totale sur la zone entièrement remplie :

$$\frac{dl(t)}{dt} = \frac{F_d - F(l(t))}{\rho_0 S_{eff}(1 - f_p(l^-, t))} \quad (11)$$

$F(l(t)) = \rho_0 N(t) V_{eff}(1 - f_p(l^-, t))$ représente le débit entrant dans la zone entièrement remplie

Le terme $\rho_0 S_{eff}(1 - f_p(l^-, t))$ montre que l'évolution de la frontière dépend du remplissage du volume non occupé.

Ce modèle n'est valable que pour $f_p(l^-) < 1$.

Relations d'interface

$$\begin{aligned}T_p(l^-, t) &= T_f(l^+, t) \\M_p(l^-, t) &= M_f(l^+, t) \\ \text{où } l^\pm(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(t) \pm \varepsilon\end{aligned}$$

Continuité du flux de quantité de mouvement

$$F(l^-, t)v(l^-, t) + P(l^-, t)f_p(l^-, t)S_{eff} = F(l^+, t)v(l^+, t) + P(l^+, t)S_{eff}$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\Delta P(t) = \frac{-\left[1 + \frac{K_d}{B\rho_0}(L - l^+)\right] + \sqrt{\Delta}}{2K_d^2} \quad (12)$$

Relations d'interface

Continuité du flux de quantité de mouvement

$$\Delta = \left[1 + \frac{K_d}{B\rho_0}(L - l^+)\right]^2 + \Omega_3 (f_p(l^-, t), N(t), l^+) \quad (13)$$

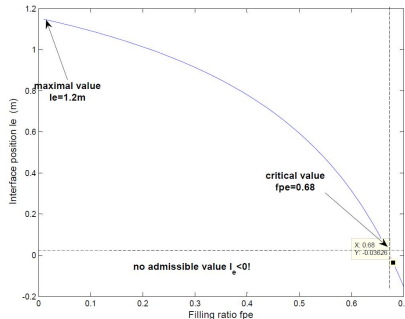
et

$$\Omega_3 = \left(\frac{2K_d}{\eta S_{eff}}\right)^2 \left(\frac{\eta V_{eff} N(t)}{B\rho_0}(L - l^+) + \xi^2 N^2(t) f_p(l^-, t) - (1 - f_p(l^-, t)) \frac{P_0}{\rho_0}\right) \quad (14)$$

Relations d'interface

Continuité du flux de quantité de mouvement

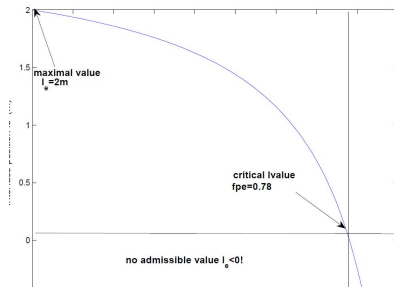
Les profils stationnaires admissibles sont décrites par la courbe ci dessous :



Relations d'interface

Continuité de Pression : $P(l^-, t) = P(l^+, t) = P_0$

$$\Delta P(t) = \frac{K_d V_{eff} N(t) \rho_0}{\left(B \rho_0 + \frac{K_d}{\eta} (L - l(t)) \right)} \quad (15)$$



Plan

Introduction

Couplage par une interface mobile :procédé d'extrusion

Modèle bi-zone d'une extrudeuse

Dynamique de l'interface mobile $I(t)$

Relations d'interface

Equation de transport et système à retard

Résolution par la méthode des caractéristiques

Système à retard sur l'entrée dépendant de l'état

Stabilisation de l'interface mobile

Système à retard autour de l'équilibre

Stabilisation autour de l'équilibre

Simulations

Conclusion et perspectives

Analyse des équations dérivant du bilan de masse

La dynamique de l'interface est découplé des phénomènes de transfert de chaleur et d'humidité :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_p}{\partial t}(x, t) = \xi N(t) \frac{\partial f_p}{\partial x}(x, t) & x \in [0, l(t)[\\ f_p(0, t) = \frac{F_{in}(t)}{\xi N(t) V_{eff}} \\ f_p(x, 0) = f_p^0(x) \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \frac{dl(t)}{dt} = \frac{F_d(t) - \rho_0 \xi N(t) V_{eff} f_p(l^-, t)}{\rho_0 S_{eff} (1 - f_p(l^-, t))} \\ l(0) = l^0 \end{cases} \quad (17)$$

$F_d(t)$, débit en sortie de filière est donné par la relation suivante :

$$\begin{cases} F_d(t) = \frac{K_d}{\eta} \Delta P(t) \\ \Delta P(t) = (P(L, t) - P_0) \end{cases} \quad (18)$$

Considérons l'équation de transport :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_p(x, t) = -\xi N(t) \frac{\partial}{\partial x} f_p(x, t) \quad (19)$$

sur un domaine spatial $[0, l(t)]$ où $l(t)$ est la solution de la relation d'interface.

Considérons le changement de coordonnées $(x, t) \rightarrow (\tau, s)$.

$$\frac{df_p(x(\tau), t)}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{\partial f_p(x(\tau), t)}{\partial t} + \frac{dx(\tau)}{d\tau} \frac{\partial f_p(x(\tau), t)}{\partial x}$$

Les courbes caractéristiques sont solutions du système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1 \\ \frac{dx(\tau)}{d\tau} = -\xi N(t) \\ \frac{df_p(x(\tau), t)}{d\tau} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Par intégration de ces équations caractéristiques sur le champs de vecteur :

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) = (t \ x \ f_p) \in \mathbb{R}^3$$

Nous obtenons les solutions suivante :

$$\begin{cases} x_1(\tau, s) = \tau + s \\ x_2(\tau, s) = \xi \int_s^{\tau+s} N(\tau') d\tau' \\ x_3(s) = f_p(s) \end{cases} \quad (21)$$

s représente la constante d'intégration .
Soit $\bar{N}(t)$ la fonction primitive de $N(t)$

$$\bar{N}(s) = \bar{N}(\tau + s) - \frac{x_2}{\xi} \quad (22)$$

De la relation (Eq. 21), nous déduisons s :

$$s = \bar{N}^{-1} \left(\bar{N}(t) - \frac{x}{\xi} \right) \quad (23)$$

De ce fait les solutions constantes le long des caractéristiques s'écrivent :

$$f_p(x, t) = f_p \left(\bar{N}^{-1} \left(\bar{N}(t) - \frac{x}{\xi} \right) \right) \quad (24)$$

La solution correspondant à la condition initiale de l'équation de transport de masse (16) s'écrit alors :

$$f_p(x, t) = f_p^0 \left(\bar{N}^{-1} \left(\bar{N}(t) - \frac{x}{\xi} \right) \right) \quad (25)$$

Remarque

La solution donnée par l'équation (25) est fonction de $\bar{N}(t)$ qui reste inconnu si la vitesse de rotation n'est pas donnée par une expression explicite.

Problème de commande

Le problème de commande que nous posons consiste à maintenir la vitesse de rotation constante et à stabiliser l'interface par un feedback sur la variable d'entrée définie par le débit d'alimentation en matière.

Rappelons que stabiliser l'interface revient à stabiliser le débit en sortie de filière.

$$\begin{cases} f_p(x, t) = f_p^0(t - \frac{x}{N_0\xi}) \\ f_p(l(t), t) = f_p^0(t - \frac{l(t)}{N_0\xi}) \end{cases} \quad (26)$$


Dynamique d'interface

L'équation de l'interface s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{dl(t)}{dt} = \frac{F_d(t) - \rho_0 N_0 V_{eff} f_p^0 \left(t - \frac{l(t)}{N_0 \xi} \right)}{\rho_0 S_{eff} \left[1 - f_p^0 \left(t - \frac{l(t)}{N_0 \xi} \right) \right]} \\ F_d(t) = \frac{K_d}{\eta} \Delta P(t) \end{cases} \quad (27)$$

L'équation (Eq. 27) définit un système non linéaire à retard dépendant de l'état sur l'entrée :

$$\begin{cases} \frac{dl(t)}{dt} = F(l(t), U(t - D(l(t)))) \\ U(t) = f_p^0(t) \end{cases} \quad (28)$$

F représente le système non linéaire et $D(l(t))$ la fonction retard dépendant de la variable d'entrée et agissant sur l'entrée $U(t)$ 

Plan

Introduction

Couplage par une interface mobile :procédé d'extrusion

Modèle bi-zone d'une extrudeuse

Dynamique de l'interface mobile $I(t)$

Relations d'interface

Equation de transport et système à retard

Résolution par la méthode des caractéristiques

Système à retard sur l'entrée dépendant de l'état

Stabilisation de l'interface mobile

Système à retard autour de l'équilibre

Stabilisation autour de l'équilibre

Simulations

Conclusion et perspectives

Analyse du système sans retard

Considérons le système sans retard :

$$\frac{dl(t)}{dt} = \frac{F_d(t) - F_{de} - \rho_0 N_0 V_{eff} (f_p^0(t) - f_{pe}^0)}{\rho_0 S_{eff} (1 - f_p^0(t))} \quad (32)$$

Son linéarisé autour de l'équilibre s'écrit :

$$\frac{d(\delta l)}{dt} = \alpha_l \delta l + \alpha_f \delta f_p \quad (33)$$

Avec :

$$\alpha_l = - \frac{\xi N_0 K_d B \rho_0}{(B \rho_0 + K_d (L - le))^2 (1 - f_{pe})} \quad (34)$$

$$\alpha_f = - \frac{\xi N_0 B \rho_0}{(1 - f_{pe})^2} \quad (35)$$

Analyse du système sans retard

Le linéarisé est stable si $\delta f_p^0(t) = K\delta l(t)$:

$$\begin{cases} K < K_{max} \\ K_{max} = \frac{\alpha_l}{\alpha_f} = \frac{B\rho_0 K_d}{((B\rho_0 + K_d(L - l_e))^2} \end{cases} \quad (36)$$

En appliquant cette commande au système non linéaire **sans retard**, La stabilité est garantie pour un bassin d'attraction donné par :

$$\begin{cases} \sup \left\{ -\frac{1-f_{pe}^0}{K}; \frac{K_d}{K C_e^2} - \frac{\eta C_e^2}{K_d} \right\} < \delta l(t) < \frac{f_{pe}^0}{K} \\ C_e^2 = \left(B\rho_0 + \frac{K_d}{\eta} (L - l_e) \right) \end{cases} \quad (37)$$

Commande du système à retard

La commande du système à retard décrit ci-dessous :

$$\frac{dl(t)}{dt} = \frac{F_d(t) - F_{de} - \rho_0 N_0 V_{eff} \left(f_p^0 \left(t - \frac{l(t)}{N_0 \xi} \right) - f_{pe}^0 \right)}{\rho_0 S_{eff} \left(1 - f_p^0 \left(t - \frac{l(t)}{N_0 \xi} \right) \right)} \quad (38)$$

Prédicteur (N. Bekiaris-Liberis et M. Krstic-CDC2011)

$$\begin{cases} U(t) = \delta f_p(l(t), t) = -K \delta l(t) = -K(P(t) - l_e) \\ D(l(t)) = \frac{l(t)}{\xi N_0} \end{cases} \quad (39)$$

Avec

$$\begin{cases} P(\theta) = l(t) + \int_{t-D(l(t))}^{\theta} \frac{F(P(s), U(s)) ds}{1 - \nabla D(P(s)) F(P(s), U(s))} \\ t - D(l(t)) \leq \theta \leq t \end{cases} \quad (40)$$

Plan

Introduction

Couplage par une interface mobile :procédé d'extrusion

Modèle bi-zone d'une extrudeuse

Dynamique de l'interface mobile $I(t)$

Relations d'interface

Equation de transport et système à retard

Résolution par la méthode des caractéristiques

Système à retard sur l'entrée dépendant de l'état

Stabilisation de l'interface mobile

Système à retard autour de l'équilibre

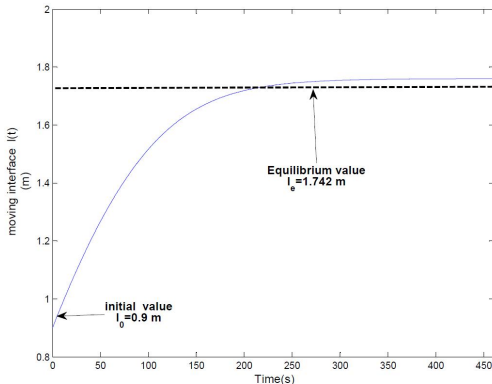
Stabilisation autour de l'équilibre

Simulations

Conclusion et perspectives

Stabilisation de l'interface autour de l'équilibre

Nous observons la stabilisation de l'interface pour une condition initiale pris à $l_0 = 0.9m$ et un équilibre fixé à $l_e = 1.742m$



Evolution du taux de remplissage

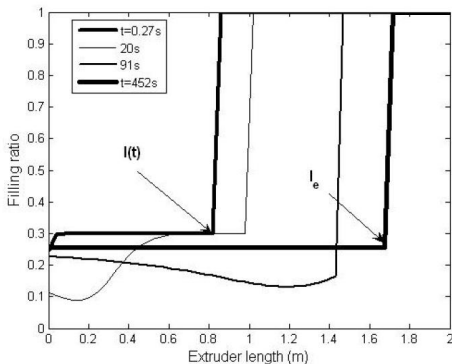


FIG.: Dynamique de la commande à différents instants

Dynamiques de la température

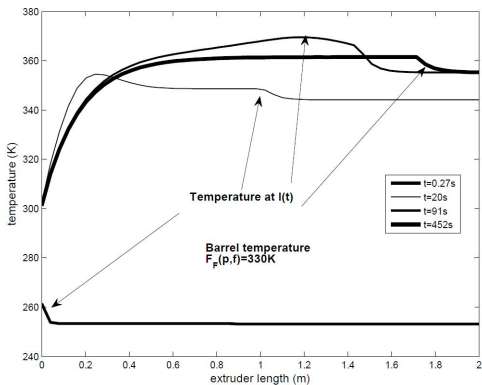


FIG.: Stabilité de la température pris à différents instants

Résumé

- ▶ Etude des EDPs couplés par une interface mobile est très peu abordé dans la littérature.
- ▶ L'approche développée sur le modèle de l'extrudeuse aboutit à un système à retard qui a fait l'objet de travaux très récents.
- ▶ Le découplage des équations issues des bilans de masse et d'énergie permet de résoudre le problème de commande en "cascade".

Perspectives

- ▶ Synthèse de la loi de commande pour le contrôle de la température.
- ▶ Introduire une viscosité distribuée dans le modèle de l'extrudeuse.