



# Inversion stable de systèmes dynamiques linéaires

Michael Di Loreto, Hao Lu

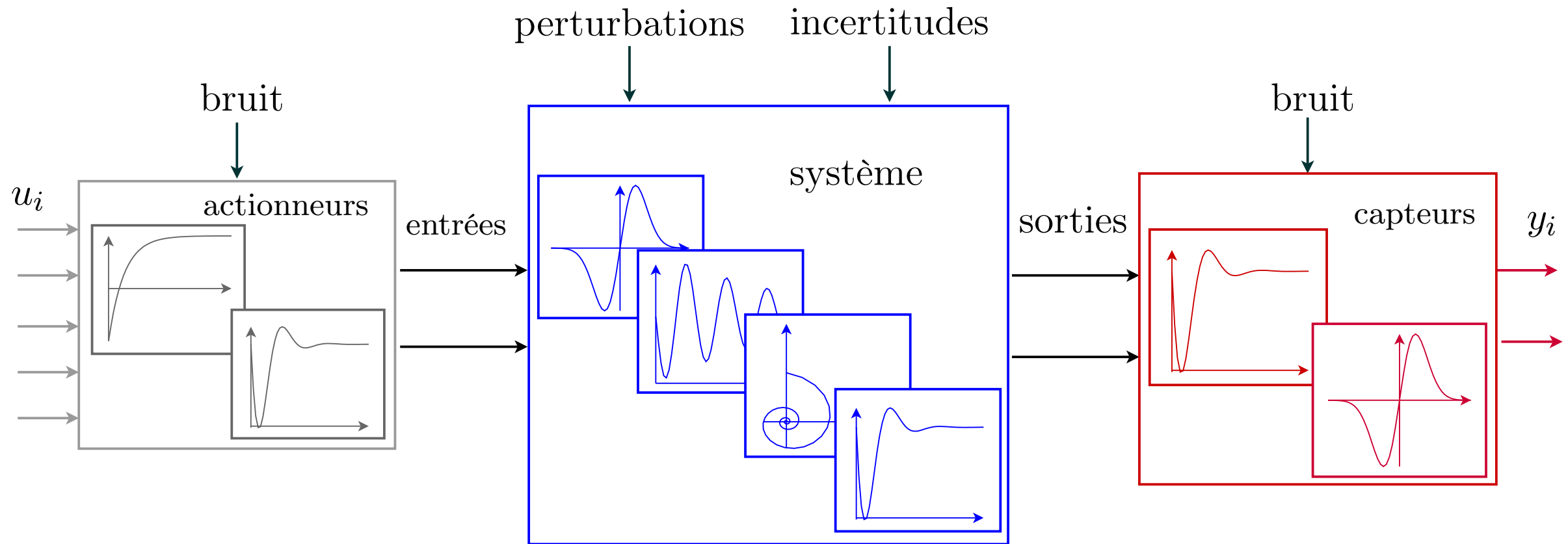
Ampère UMR CNRS 5005, INSA-Lyon

`michael.di-loreto@insa-lyon.fr`

`hao.lu@insa-lyon.fr`

**Groupe de Travail SAR, 7 Mai 2010**

# Inversion : Principe



## Inversion : Applications

- **commande** : feedforward, stabilisation, poursuite de modèle, ...
- **génération de trajectoire**
- **dimensionnement** pour la conception
- **optimisation** (approximation, allocation de contrôle, ...)

## Inversion stable : Plusieurs formulations possibles

- inverse stable et causale
- inverse stable et acausale
- approximation causale (dans un sens à préciser) d'une inverse

**Exemple introductif :**

$$t_1(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad t_2(s) = \frac{1}{s+1}, \quad t_3(s) = \frac{e^{-\vartheta s}}{s+1}, \quad t_4(s) = \frac{e^{-\vartheta s} s-1}{s+1}$$

## Plan de l'exposé

1. Inversion stable acausale
2. Presque-inversion : Formulation et résolution
3. Commentaires pour l'inversion sur une algèbre de Banach
4. Mise en œuvre numérique

# Inversion stable acausale

- Soit  $t(s)$  une fraction rationnelle, associée à la représentation d'état

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

- La fraction  $t(s)^{-1}$  admet une représentation d'état de la forme

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \Phi\xi(t) + \Lambda\eta(t) \\ u(t) &= \Gamma\xi(t) + \Lambda\eta(t)\end{aligned}$$

avec

$$\eta(t) = \left[ y(t) \quad y^{(1)}(t) \quad \dots \quad y^{(r)}(t) \right]^T, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_- & 0 \\ 0 & \Phi_+ \end{bmatrix}$$

- Si  $y_d^{(i)} \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_\infty$  (pour  $i = 0, \dots, r$ ) et  $t(s)$  n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire, alors il existe  $x_d(t)$  et  $u_d(t)$  **bornés** tels que

$$\begin{aligned}\dot{x}_d(t) &= Ax_d(t) + Bu_d(t) \\ y_d(t) &= Cx_d(t)\end{aligned}$$

avec  $x_d(\pm\infty) = u_d(\pm\infty) = 0$  (Devasia et al., 1996), (Sogo, 2010)

- **Résolution numérique :**

$$x_d(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t - \tau) \Lambda \eta(\tau) d\tau, \quad \Psi(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}(t)e^{t\Phi_-} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}(-t)e^{t\Phi_+} \end{bmatrix}$$

**Exemple :**

$$t(s) = \frac{(s+4)(3-s)}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

Par inversion, on obtient

$$t(s)^{-1} = -s - 1 + t_+(s)t_-(s), \quad t_-(s) = \frac{-50}{s+4} + 14, \quad t_+(-s) = \frac{1}{s+3}$$

soit

$$u_d(t) = -y'_d(t) - y_d(t) + \int_{-\infty}^t (-50 e^{-4(t-\tau)})v(\tau) d\tau + 14v(t)$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-3(\sigma-\tau)} y_d(-\tau) d\tau \Big|_{\sigma=-t}$$

dont une représentation d'état s'écrit

$$\dot{x}_1(t) = -4x_1(t) + v(t)$$

$$u_d(t) = -50x_1(t) + 14v(t) - y'_d(t) - y_d(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + y_d(-t)$$

$$v(-t) = x_2(t)$$



## Remarques sur l'inversion acausale :

- réalisation en temps réel d'une solution acausale
- régularité de la trajectoire désirée
- extension au cas non linéaire (avec dynamique résiduelle)

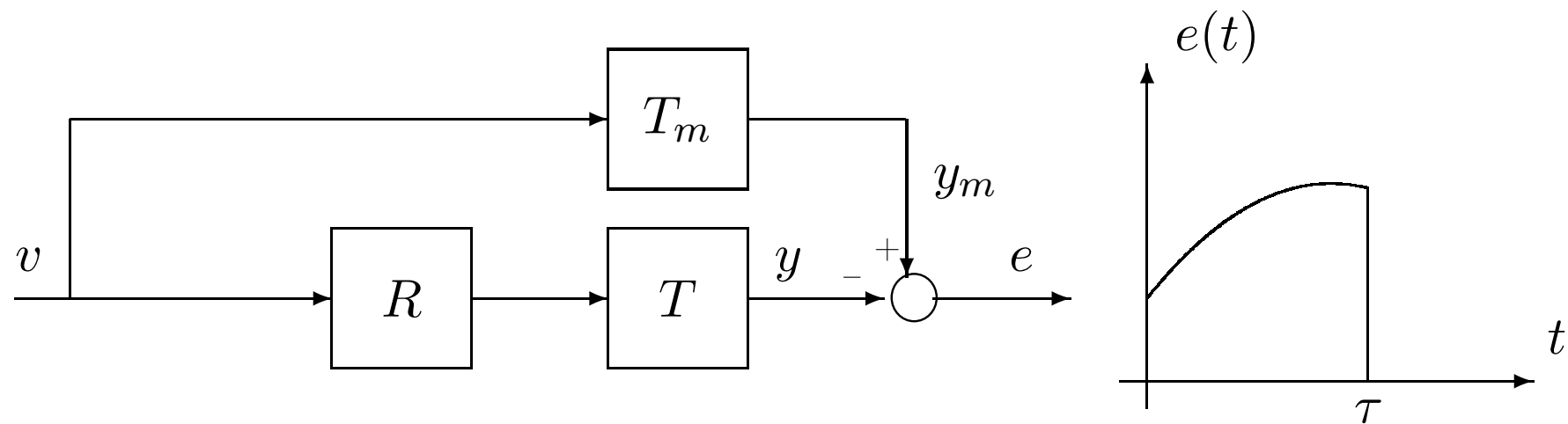
# Presque-inversion : Formulation et résolution

## Objectifs :

- garantir une inverse exacte après un temps fini
- suivi de trajectoire en temps fini

## Formulation :

- Pour  $T_m$  et  $T$  donnés, déterminer  $R$  stable tel que l'erreur de suivi  $e$  soit à support fini



- **Caractérisation de l'ensemble :**

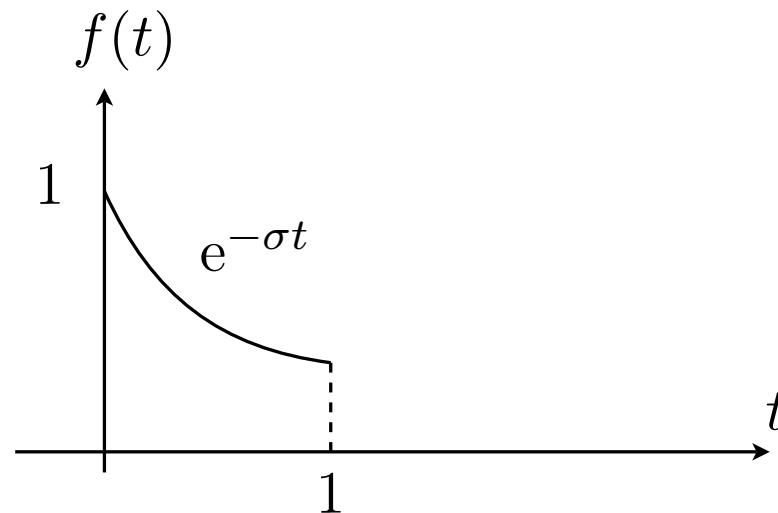
$$\mathcal{P} = \left\{ R(s) \text{ stable} : E = T_m - TR \in \mathcal{G} + \mathbb{R}[e^{-\vartheta s}] \right\}$$

- **Retard distribué : Anneau  $\mathcal{G}$**

$$y(t) = \int_{h_1}^{h_2} f(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

- **Exemple :**

$$t(s) = \frac{1 - e^{-(s+\sigma)}}{s + \sigma}$$



- L'anneau  $\mathbb{R}[s, e^{-\tau s}]$  : **Domaine de Factorisation Unique** (Van der Waerden, 1950)

$$N(s) = \prod_{i=1}^l N_i(s) = \tilde{N}(s)N_u(s),$$

avec  $N_u(s)$  à terme principal et stable

### Exemple

$$N(s) = (s + 1)(s - 2)(s e^{-\vartheta s} + 1)(s(2 - e^{-\vartheta s}) + 1)$$

Une factorisation s'écrit

$$\begin{aligned} N_u(s) &= (s + 1)(s(2 - e^{-\vartheta s}) + 1) \\ \tilde{N}(s) &= (s - 2)(s e^{-\vartheta s} + 1) \end{aligned}$$

## Synthèse :

- construction de factorisations premières

$$T = ND^{-1}, T_m = N_m D_m^{-1}$$

- décomposition de la factorisation

$$N = \tilde{N}N_u,$$

- résolution d'une équation de Bézout

$$X\tilde{N} + YD_m = 1$$

- division euclidienne

$$XN_m = QD_m + P$$

- avec  $R = DN_u^{-1}PD_m^{-1}$ , on obtient

$$E = T_m - TR = YN_m + \tilde{N}Q \in \mathcal{G} + \mathbb{R}[e^{-\vartheta s}]$$

**Exemple :**

$$T(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}, \quad T_m(s) = \frac{1}{s+2},$$

avec  $\tilde{N} = e^{-s}$  et  $N_u = 1$ .

On résout

$$X\tilde{N} + YD_m = 1, \quad X = e^{-2}, \quad Y = \frac{1 - e^{-(s+2)}}{s+2},$$

La division  $XN_m = QD_m + P$  donne

$$Q = 0, \quad P = e^{-2}.$$

L'erreur de poursuite de modèle  $E = T_m - TR$  s'écrit

$$E = \frac{1 - e^{-(s+2)}}{s+2}, \quad R = e^{-2} \left( \frac{s+1}{s+2} \right).$$

**Exemple :**

$$T(s) = \frac{s e^{-s} + 1}{s + 2}, \quad T_m(s) = \frac{e^{-s}}{s + 1},$$

avec  $\tilde{N} = s e^{-s} + 1$  et  $N_u = 1$ . Par résolution, on obtient

$$X\tilde{N} + YD_m = 1, \quad X = -\frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}, \quad Y = \frac{1}{1 - e^{-1}} \frac{1 + s e^{-(s+1)}}{s + 1},$$

puis on effectue la division  $XN_m = QD_m + P$ ,

$$Q = 0, \quad P = -\frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} e^{-s}.$$

L'erreur de poursuite de modèle  $E = T_m - TR$  s'écrit

$$E = \frac{e^{-s}}{1 - e^{-1}} \left( e^{-(s+1)} + \frac{1 - e^{-(s+1)}}{s + 1} \right), \quad R = -\frac{e^{-(s+1)}}{1 - e^{-1}} \frac{s + 2}{s + 1}.$$

**Exemple :**

$$T(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad T_m(s) = 1,$$

avec  $\tilde{N} = s - 1$  et  $N_u = 1$ . Par résolution on obtient l'erreur  $E = 1 - TR$ , avec

$$E(s) = e^{-\vartheta(s-1)}, \quad R(s) = (s-1) \frac{1 - e^{-\vartheta(s-1)}}{s-1}$$



# Commentaires pour l'inversion sur une algèbre de Banach

- Algèbre  $\mathcal{A}$  de Wiener

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ f_a(t) + \sum_{i=0}^{\infty} f_i \delta(t - t_i) & , t \geq 0 \end{cases} ,$$

où  $\|f_a\|_1 = \int_0^{\infty} |f_a(t)| dt < \infty$ , et  $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i| < \infty$

- Norme sur  $\mathcal{A}$  :  $\|f\|_{\mathcal{A}} = \|f_a\|_1 + \sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$
- Algèbre  $\hat{\mathcal{A}}$  des transformées de Laplace de  $\mathcal{A}$ , avec la norme

$$\|\hat{f}\|_{\hat{\mathcal{A}}} = \|f\|_{\mathcal{A}}, \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

## Théorème

Soit  $T(s) = e^{-s}\tilde{T}(s)$ , avec  $\tilde{T}(s) \in \hat{\mathcal{A}}$ . Alors, l'erreur de poursuite de modèle

$$E(s) = T_m(s) - T(s)R(s), \quad R(s) \in \hat{\mathcal{A}},$$

de norme  $\mathcal{A}$  minimale est à support finie.

## Idée de démonstration

On décompose  $T_m(s) = \bar{T}_m(s) + e^{-s}\tilde{T}_m(s)$ , où  $\bar{T}_m(s)$  est à support dans  $[0, 1]$ . Alors

$$E = T_m - TR = \bar{T}_m + e^{-s}(\tilde{T}_m - \tilde{T}R), \quad \forall R(s) \in \hat{\mathcal{A}}.$$

Alors

$$\inf_{R \in \hat{\mathcal{A}}} \|E\|_{\mathcal{A}} = \|\bar{T}_m\|_{\mathcal{A}} + \inf_{R \in \hat{\mathcal{A}}} \|\tilde{T}_m - \tilde{T}R\|_{\mathcal{A}}.$$

La solution optimale s'écrit sous la forme (Dahleh & Pearson, 1987)

$$E^*(s) = \bar{T}_m(s) + e^{-s}\tilde{E}^*(s), \quad \text{avec } \tilde{E}^*(s) = \sum_{i=0}^r \alpha_i^* e^{-st_i},$$

## Inversion sur l'algèbre $\mathcal{A}$

- condition nécessaire et suffisante :

$$\inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\hat{f}(s)| > 0$$

- si  $\|1 - f\|_{\mathcal{A}} < 1$ , alors  $f$  est inversible sur  $\mathcal{A}$
- condition nécessaire et suffisante d'inversibilité robuste :

$$(1 + q\delta) \text{ inversible sur } \mathcal{A}, \forall \delta \in \mathcal{A}_{\text{sp}}, \|\delta\| < 1 \iff \|q\|_{\mathcal{A}} \leq 1$$

## Quelques questions :

- information sur la phase pour une condition nécessaire d'inversibilité
- interprétation fréquentielle
- existence et calcul de presque-inverse

# Mise en œuvre numérique

## Approximation de retards distribués :

- approximation entrée-sortie
- approximation du noyau de convolution
- approximation en temps échantillonné

## Remarque :

- Soit

$$\vartheta_\alpha(s) = \frac{1 - e^{-(s-\alpha)h}}{s - \alpha}$$

Alors tout élément  $q \in \mathcal{G}$  se décompose sous la forme

$$q(s) = \sum_{k=0}^{r_q} \varphi_k(e^{-sh}) \vartheta_\alpha^{(k)}(s)$$

**Une propriété de densité :**

### **Théorème**

Le sous-anneau  $\mathcal{G}_s = \{\vartheta_{\alpha_i}^{(k)} \in \mathcal{G}, \operatorname{Re}(\alpha_i) < 0, 0 \leq k \leq r, i \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $\mathcal{G}$  pour la norme  $\mathcal{L}_\infty$ -induite

### **Corollaire**

Soit  $f \in \mathcal{G}$ . Pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe des éléments  $f_n \in \mathcal{G}_s, n \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{N}$ , tels que

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon$$

# Perspectives

- développement d'outils numériques pour l'implémentation de retards distribués
- inversibilité robuste sur  $\mathcal{A}$
- généralisation de la presque-inverse au cas non-linéaire (avec dynamique résiduelle)
- approximation (rationnelle et/ou irrationnelle) sur  $\mathcal{A}$